

Chuyên đề 7

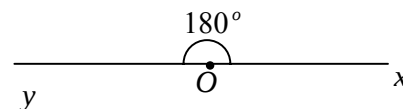
LƯỢNG GIÁC TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

A. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Đơn vị đo góc và cung:

1. Độ:

$$\text{Góc } 1^0 = \frac{1}{180} \text{ góc bẹt}$$



2. Radian: (rad)

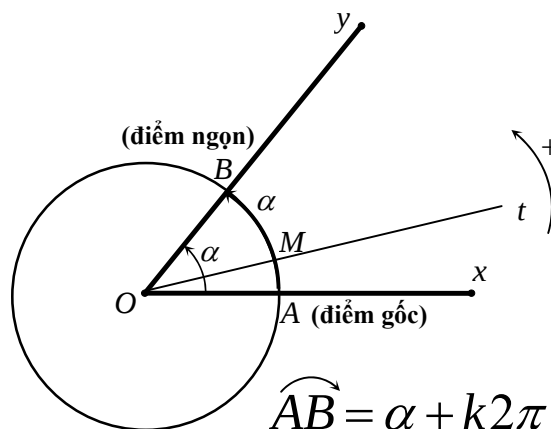
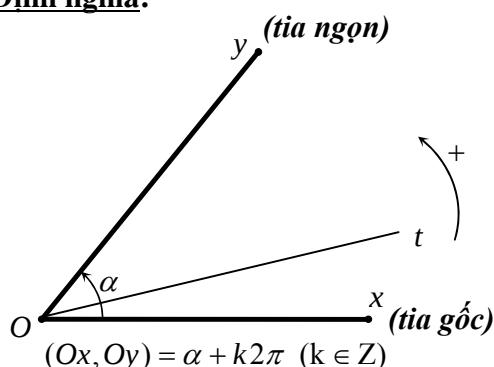
$$180^0 = \pi \text{ rad}$$

3. Bảng đổi độ sang rad và ngược lại của một số góc (cung) thông dụng:

Độ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

II. Góc lượng giác & cung lượng giác:

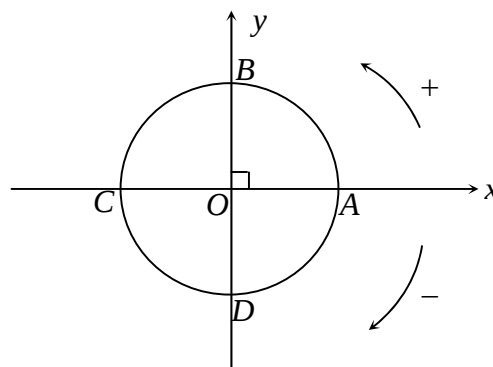
1. Định nghĩa:



2. Đường tròn lượng giác:

Số đo của một số cung lượng giác đặc biệt: $\widehat{AM} = \alpha + k2\pi$

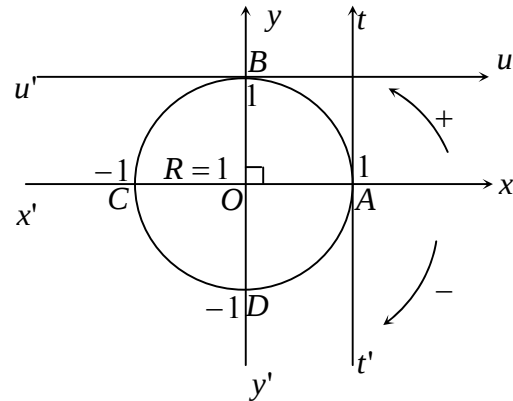
M	A	→	$2k\pi$
	B	→	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
	C	→	$\pi + 2k\pi$
	D	→	$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
	A, C	→	$k\pi$
	B, D	→	$\frac{\pi}{2} + k\pi$



III. Định nghĩa hàm số lượng giác:

1. Đường tròn lượng giác:

- A: điểm gốc
- $x'Ox$: trục côsin (trục hoành)
- $y'Oy$: trục sin (trục tung)
- $t'At$: trục tang
- $u'Bu$: trục cotang



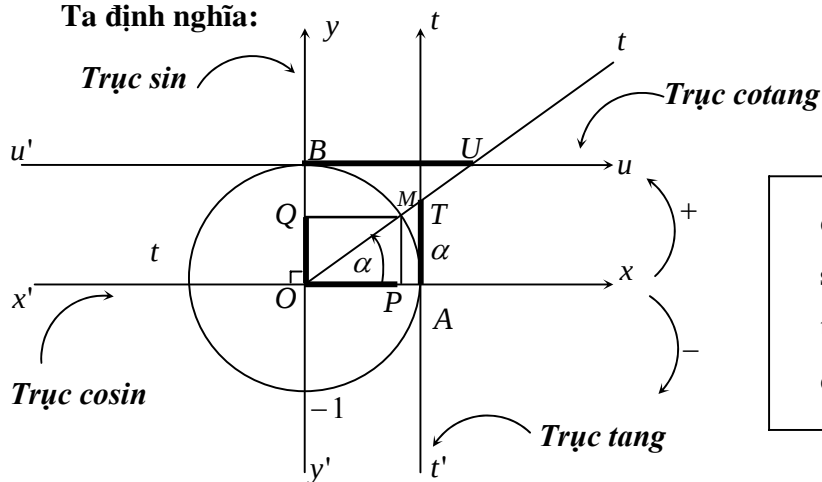
2. Định nghĩa các hàm số lượng giác:

a. **Định nghĩa:** Trên đường tròn lượng giác cho $AM = \alpha$.

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên $x'Ox$ và $y'Oy$

T, U lần lượt là giao điểm của tia OM với $t'At$ và $u'Bu$

Ta định nghĩa:



$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \overline{OP} \\ \sin \alpha &= \overline{OQ} \\ \tan \alpha &= \overline{AT} \\ \cot \alpha &= \overline{BU}\end{aligned}$$

b. Các tính chất :

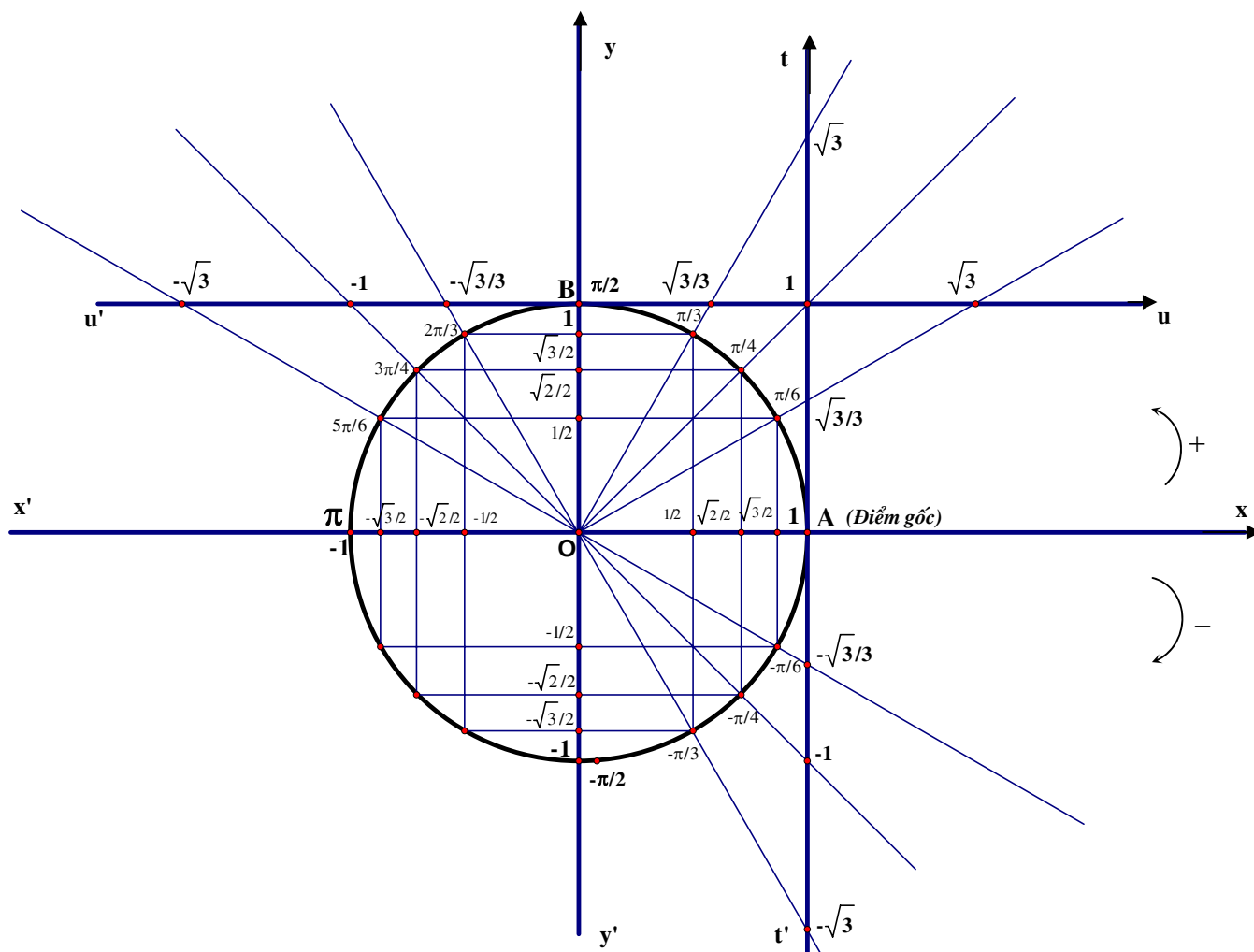
- Với mọi α ta có :
 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ hay $|\sin \alpha| \leq 1$
 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ hay $|\cos \alpha| \leq 1$
- $\tan \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cot \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq k\pi$

c. Tính tuần hoàn

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha \\ \tan(\alpha + k\pi) &= \tan \alpha \\ \cot(\alpha + k\pi) &= \cot \alpha\end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

IV. Giá trị các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt:

Ta nên sử dụng đường tròn lượng giác để ghi nhớ các giá trị đặc biệt



Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Hslg	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot \alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

V. Hàm số lượng giác của các cung (góc) có liên quan đặc biệt:

Đó là các cung :

1. Cung đối nhau : α và $-\alpha$ (tổng bằng 0) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $-\frac{\pi}{6}$, ...)

2. Cung bù nhau : α và $\pi - \alpha$ (tổng bằng π) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{5\pi}{6}$, ...)

3. Cung phụ nhau : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{\pi}{3}$, ...)

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{2\pi}{3}$, ...)

5. Cung hơn kém π : α và $\pi + \alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{7\pi}{6}$, ...)

1. Cung đối nhau:

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

Đối cos

Bù sin

2. Cung bù nhau :

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

3. Cung phụ nhau :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

Phụ chéo

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$
sin bằng cos
cos bằng trừ sin

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

5. Cung hơn kém π :

$$\begin{aligned}\cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

Hơn kém π
tang, cotang

VI. Công thức lượng giác:

1. Các hệ thức cơ bản:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

$$1. \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$2. \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} 1) \cos^4 x + \sin^4 x &= (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} 2) \cos^6 x + \sin^6 x &= (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

2. Công thức cộng :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

$$1. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 1) \quad \cos \alpha + \sin \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \\
 2) \quad \cos \alpha - \sin \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

3. Công thức nhân đôi:

$ \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned} $	→	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
	→	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
	→	$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

4 Công thức nhân ba:

$ \begin{aligned} \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned} $	→	$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4}$
	→	$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$

5. Công thức hạ bậc:

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

6. Công thức tính $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ theo $t = \tan \frac{\alpha}{2}$

$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\cos \alpha . \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha . \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha . \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

8. Công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} . \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} . \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} . \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} . \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

9. Các công thức thường dùng khác:

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}$$

$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}$$

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Các bước giải một phương trình lượng giác

Bước 1: Tìm điều kiện (nếu có) của ẩn số để hai vế của pt có nghĩa

Bước 2: Sử dụng các phép **biến đổi tương đương** để biến đổi pt đến một pt **đã biết cách giải**

Bước 3: Giải pt và chọn nghiệm phù hợp (nếu có)

Bước 4: Kết luận

I. Định lý cơ bản: (Quan trọng)

$$\begin{aligned} \sin u = \sin v &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \\ \cos u = \cos v &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi \\ \tan u = \tan v &\Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (u, v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \cot u = \cot v &\Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (u, v \neq k\pi) \end{aligned}$$

(u; v là các biểu thức chứa ẩn và $k \in \mathbb{Z}$)

Ví dụ: Giải phương trình:

$$1. \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$2. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$3. \cos 3x = \sin 2x$$

$$4. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 - \cos 6x)$$

Bài giải

$$1) \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$2) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$3) \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$4) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}(3 - \cos 6x) \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} = \frac{3 - \cos 6x}{4} \Leftrightarrow \cos 6x = -\cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x = \cos(\pi - 4x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = \pi - 4x + k2\pi \\ 6x = -\pi + 4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

II. Các phương trình lượng giác cơ bản:

1. **Dạng 1:** $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$ ($\forall m \in R$)

* **Gpt :** $\sin x = m$ (1)

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(1) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \sin \alpha$ và ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = (\pi - \alpha) + k2\pi \end{cases}$$

* **Gpt :** $\cos x = m$ (2)

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(2) vô nghiệm
- Nếu $|m| \leq 1$ thì ta đặt $m = \cos \beta$ và ta có

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + k2\pi \\ x = -\beta + k2\pi \end{cases}$$

* **Gpt:** $\tan x = m$ (3) (pt luôn có nghiệm $\forall m \in R$)

- Đặt $m = \tan \gamma$ thì
- $$(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan \gamma \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi$$

* **Gpt:** $\cot x = m$ (4) (pt luôn có nghiệm $\forall m \in R$)

- Đặt $m = \cot \delta$ thì
- $$(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot \delta \Leftrightarrow x = \delta + k\pi$$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

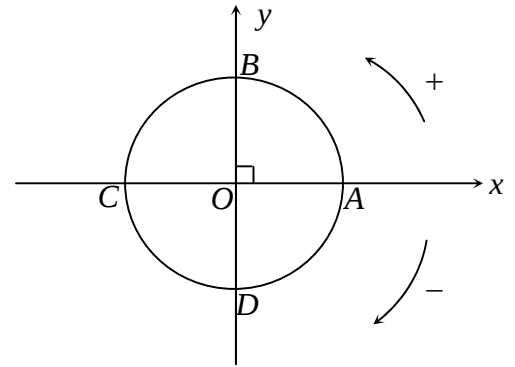
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



Ví dụ:

Giải các phương trình :

$$1) \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$4) \cos^4 x + \sin^4 x = \cos 2x$$

Bài giải:

$$1) \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$2) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$3) \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$$

$$4) \cos^4 x + \sin^4 x = \cos 2x \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2\cos^2 2x - 1 = 4\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi$$

Ví dụ:

Giải các phương trình:

$$1) 1 + \cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos 2x$$

$$3) 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin 4x - 2 = 0$$

$$2) \sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x$$

$$4) \sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$$

Bài giải

$$1) 1 + \cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi$$

Vậy nghiệm pt là $x = k\pi$

$$2) \sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x \Leftrightarrow \frac{5 + 3\cos 4x}{8} = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Vậy nghiệm pt là $x = \frac{k\pi}{2}$

$$3) 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 + \cos 4x + \sin 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pi + k2\pi \\ 4x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm pt là $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$

$$4) \sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\sin x \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

Vậy nghiệm pt là $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

2. Dạng 2:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

($a \neq 0$)

Cách giải:

Đặt ẩn phụ : $t = \sin x$ ($t = \cos x$; $t = \tan x$; $t = \cot x$)

Ta được phương trình : $at^2 + bt + c = 0$ (1)

Giải phương trình (1) tìm t , rồi suy ra x

Chú ý : Phải đặt điều kiện thích hợp cho ẩn phụ (nếu có)

Ví dụ :

$$1) 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$2) \cos 2x - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0$$

$$3) 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \quad 4) \frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$$

Bài giải

$$1) 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \text{ (VN)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm pt là } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$2) \cos 2x - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) - 8\cos x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \text{ (VN)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{Vậy nghiệm pt là } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{2} - \sin 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow 3 + 1 - 2\sin^2 2x - 2\sin 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 2\sin 2x - 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \end{cases} \quad (\text{VN}) \\
& \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\
& \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm pt là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$4) \quad \frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0 & \Leftrightarrow \frac{5 + 3\cos 4x}{4} - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow 5 + 3(1 - 2\sin^2 2x) - 2\sin 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow 6\sin^2 2x + 2\sin 2x - 8 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad (\text{VN}) \\
& \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\
& \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta được nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.

3. Dạng 3:

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (1) \quad (a, b \neq 0)$$

Cách giải:

- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ thì pt
(1) $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$
- Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$ và $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi)$ thì :
(2) $\Leftrightarrow \cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$

Pt (3) có dạng 1. Giải pt (3) tìm x.

Chú ý :

$$\text{Pt } a \cos x + b \sin x = c \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$$

Ví dụ : Giải các phương trình :

1) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$

2) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

Bài giải

1) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm pt là $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned}
2) \quad & 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x = -1 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x = -\frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \cos \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pi + k2\pi \\ 4x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm pt là

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

d. Dạng 4:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad (a, c \neq 0) \quad (1)$$

Cách giải 1:

Áp dụng công thức hạ bậc : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ và $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

và công thức nhân đôi : $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ thay vào (1) ta sẽ biến đổi pt (1) về dạng 3

Cách giải 2: (Quy về pt theo tang hoặc cotang)

Chia hai vế của pt (1) cho $\cos^2 x$ ta được pt:

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

Đây là pt dạng 2 đã biết cách giải.

Chú ý: Trước khi chia phải kiểm tra xem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm của (1) không?

Ví dụ : Giải phương trình:

$$\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$$

d. Dạng 5:

$$a(\cos x + \sin x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0 \quad (1)$$

Cách giải :

- Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$
Do $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$
- Thay vào (1) ta được phương trình :
$$at + b \frac{t^2 - 1}{2} + c = 0 \quad (2)$$
- Giải (2) tìm t . Chọn t thỏa điều kiện rồi giải pt: $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = t$ tìm x.

Ví dụ : Giải phương trình :

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$$

Chú ý : Ta giải tương tự cho pt có dạng :

$$a(\cos x - \sin x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$$

Ví dụ : Giải phương trình :

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$$

4. Các phương pháp giải phương trình lượng giác thường sử dụng :

a. Phương pháp 1: Biến đổi pt đã cho về một trong các dạng pt lượng giác cơ bản đã biết

Ví dụ: Giải phương trình:

- $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x - \frac{3}{2} = 0$
- $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$
- $\tan x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos x}$

b. Phương pháp 2: Biến đổi pt đã cho về dạng tích số

Cơ sở của phương pháp là dựa vào các định lý sau đây:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad A.B.C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

Ví dụ : Giải các phương trình :

- $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$
- $2 \sin^3 x + \cos 2x - \cos x = 0$

c. Phương pháp 3: Biến đổi pt về dạng có thể đặt ẩn số phụ

Một số dấu hiệu nhận biết :

* Phương trình chứa cùng một hàm số lượng giác (cùng cung khác lũy thừa)

Ví dụ : Giải các phương trình :

a. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

b. $4 \cos^3 x - \cos 2x - 4 \cos x + 1 = 0$

* Phương trình có chứa $(\cos x \pm \sin x)$ và $\sin x \cdot \cos x$

Ví dụ : Giải phương trình : $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

2) $2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$

3) $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

Bài giải:

1) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

Điều kiện $\sin x \neq 0$ và $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left(\frac{1}{\sin x \cos x} + 2\sqrt{2} \right) = 0.$$

• $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

• $\frac{1}{\sin x \cos x} + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là :

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; \quad x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài giải:

$$2) 2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$4 \sin x \cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2 \cos x \Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0.$$

$$\bullet \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

$$\bullet \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài giải:

$$3) \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3} \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

$$\bullet \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$\bullet \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 2: Giải các phương trình lượng giác sau

$$1) (1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

$$2) 2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

$$3) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

Bài giải

$$1) (1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình đã cho} &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \\ &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài giải:

$$2) 2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin 7x - \sin x + 2 \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x (2 \sin 3x - 1) = 0.$$

- $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài giải:

$$3) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 3: Giải các phương trình lượng giác sau

- 1) $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$
- 2) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$
- 3) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

Bài giải:

$$1) \frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \right) - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do điều kiện (1) nên: } x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Bài giải:

$$2) \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$$

Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$ (1).

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = 4 \\ \Leftrightarrow & \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi. \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ thỏa mãn (1).} \end{aligned}$$

Bài giải:

3) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$-2\sin 2x \cdot \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin 2x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (2\cos x + 1) = 0.$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 4: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

2) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

3) $\cos^4 x + \sin^4 x + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

Bài giải:

1) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(1 + \cos 6x) \cos 2x - (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\frac{3}{2} \text{ (loại).} \end{cases}$$

Vậy $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài giải:

$$2) 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2 \cos x (\sin x + \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
- $2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài giải:

$$3) \cos^4 x + \sin^4 x + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{2} \left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x \right] - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x - (1 - 2 \sin^2 2x) + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ hoặc } \sin 2x = -2 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy } \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 5: Giải các phương trình lượng giác sau

$$1) \cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$2) 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$$

$$3) (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

Bài giải:

$$1) \cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 - \sin x \cos x + \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ 1 - \sin x \cos x + \sin^2 x = 0. \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ thỏa mãn điều kiện } (*).$$

$$\text{TH2: } 1 - \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin 2x + \sin^2 x = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài giải:

$$2) 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$$

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (*).$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = \frac{3 \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} (1 - \sin x) \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } \sin x = -2 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Bài giải:

$$3) (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

$$(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

$$\bullet 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là: } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ và } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

-----Hết-----